Комплексный анализ, семинар 8 30.03.2012

1. *Произведение Бляшке.* Пусть $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ – последовательность точек открытого единичного круга $\mathbb{D}$, занумерованных в порядке неубывания их модулей. Будем считать, что $|a_n| \to 1$ при $n \to \infty$, причем $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(1-|a_n|) < \infty$. Для $z \in \mathbb{D}$ определим функцию $B(z)$ при помощи произведения

$$B(z) = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{z-a_n}{1-\bar{a}_n z}\,\frac{\bar{a}_n}{|a_n|}.$$

1) Покажите, что функция $B(z)$ голоморфна в $\mathbb{D}$.

2) Докажите, что «радиальный предел» $B_*(\theta) = \lim\limits_{r\to 1} B(re^{i\theta})$ существует для почти всех θ.

3) Найдите $|B_*(\theta)|$ для почти всех θ.

4) Найдите необходимое и достаточное условие существования радиального предела $B_*(0)$.

2. Докажите справедливость следующих разложений мероморфных функций в ряды простых дробей:

1) $\operatorname{ctg} z = \frac{1}{z} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2-n^2\pi^2}$; 2) $\frac{1}{\operatorname{sh} z} = \frac{1}{z} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2z}{z^2+n^2\pi^2}$; 3) $\frac{1}{\sin^2 z} = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n\pi)^2}$.

3. Докажите справедливость следующих разложений целых функций в бесконечные произведения:

1) $\sin z = z \prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right)$; 2) $e^z - 1 = ze^{z/2} \prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{z^2}{4n^2\pi^2}\right)$;

3) $\frac{1}{\Gamma(z+1)} = e^{Cz} \prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{z}{n}\right) e^{-z/n}$, где C – постоянная Эйлера.

4. На компактной римановой поверхности X рассмотрим задачу Миттаг-Леффлера для *дифференциальных форм.* Для этого зададимся локальными главными частями

$$\omega_j = \sum_{j=-m}^{-1} c_j z^j dz$$

в окрестности конечного множества точек $S = \{x_j\} \in X$ и поставим задачу построения глобально определенной мероморфной 1-формы ω, голоморфной вне S и такой, что $\omega - \omega_j$ голоморфна в точке x_j. Всегда ли разрешима эта задача?

5. Пусть $P(z)$ – заданный полином с известными корнями. Найдите все мероморфные решения $f(z)$ уравнения $f(z+1) = P(z)f(z)$ с точностью до произвольного периодического множителя с единичным периодом. Выберите одно (произвольное) из этих решений и найдите его дивизор.